Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Primer Examen parcial

MAT-I , MA-1111 , ENE-MAR 2013
Primer Examen parcial

DEBE JUSTIFICAR TODAS SUS RESPUESTAS
SOLUCION

1. Dadas las funciones:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{cases} (\mathbf{x}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}} & ,si \quad \mathbf{x} \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{1}+|\mathbf{1}-\mathbf{x}| & ,si \quad \mathbf{1} < \mathbf{x} \leq \mathbf{2} \end{cases} \qquad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{3}-\mathbf{x}}$$

a) Encuentre el dominio de **g** y **h**. (1 pts)

RESPUESTA:

Dada la definición de g , se tienen que : DOM(g)= $(-\infty, o] \cup (1, 2]$
Por otro lado, para poder evaluar h(x), x debe satisfacer la condición:

$$\begin{aligned} 3 - x &\geqslant 0 \\ \iff \quad 3 &\geqslant x \end{aligned}$$

Luego, DOM(h)=$(-\infty, 3]$ ∎

b) Encuentre $\mathbf{g}+\mathbf{h}$ y determine su dominio. (1 pts)

RESPUESTA:

$$\begin{aligned} \text{DOM(g+h)} &= \text{DOM(g)} \cap \text{DOM(h)} \\ &= [(-\infty, o] \cup (1, 2]] \cap (-\infty, 3] \\ &= (-\infty, o] \cup (1, 2] \end{aligned}$$

Luego se puede escribir:

$$(g+h)(x) = g(x) + h(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + \sqrt{3-x} & ,si \quad x \leq 0 \\ 1 + |1-x| + \sqrt{3-x} & ,si \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

∎

c) Encuentre $\mathbf{g} \circ \mathbf{h}$ y su dominio. (2 pts)

RESPUESTA:

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \begin{cases} (h(x)-1)^2 & ,si \quad h(x) \leq 0 \\ 1+|1-h(x)| & ,si \quad 1 < h(x) \leq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\sqrt{3-x}-1)^2 & ,si \quad \sqrt{3-x} \leq 0 \quad \text{y} \quad x \leq 3 \\ 1+|1-\sqrt{3-x}| & ,si \quad 1 < \sqrt{3-x} \leq 2 \quad \text{y} \quad x \leq 3 \end{cases}$$

Y como:

i) $\sqrt{3-x} \leq 0 \quad \text{y} \quad x \leq 3 \iff x = 3 \quad \text{y} \quad 3 \geqslant x \iff x = 3$

ii) $$\begin{aligned} 1 < \sqrt{3-x} \leq 2 \quad \text{y} \quad x \leq 3 &\iff 1 < 3-x \leq 4 \quad \text{y} \quad x \leq 3 \\ &\iff -2 < -x \leq 1 \quad \text{y} \quad x \leq 3 \\ &\iff -1 \leq x < 2 \quad \text{y} \quad x \leq 3 \\ &\iff -1 \leq x < 2 \end{aligned}$$

Se obtiene:

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \begin{cases} (\sqrt{3-x}-1)^2 & ,si \quad x = 3 \\ 1+|1-\sqrt{3-x}| & ,si \quad -1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1+|1-\sqrt{3-x}| & ,si \quad -1 \leq x < 2 \\ 1 & ,si \quad x = 3 \end{cases}$$

Y $\quad \text{DOM}(g \circ h) = [-1, 2) \cup \{3\}$ ■

d) Encuentre, si existe, el valor de $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{g(0)}}$. (1 pts)

RESPUESTA:

g(0)=1, entonces: $\dfrac{1}{\text{g}(0)}$ existe y $\dfrac{1}{\text{g}(0)} = 1$ ■

2. Resolver la desigualdad siguiente:

$$|\mathbf{x}-\mathbf{2}| < \mathbf{1} + |\mathbf{x}|$$

(5 pts)

RESPUESTA:

Aplicando la definición de valor absoluto se puede construir, la tabla siguiente:

$-\infty$	0	2	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$(\quad -x \quad)$	$[\quad x \quad]$	$[\quad x \quad)$
$\lvert x-2\rvert$	$(\quad -x+2 \quad]$	$[\quad -x+2 \quad)$	$[\quad x-2 \quad)$
$\lvert x-2\rvert < 1+\lvert x\rvert$	$(\quad -x+2 < 1-x \quad)$	$[\quad -x+2 < 1+x \quad)$	$[\quad x-2 < 1+x \quad)$
	CASO 1	CASO 2	CASO 3

Se procede a buscar el conjunto solución para cada caso:

CASO 1: $x \in (-\infty, 0)$ y satisface: $-x+2 < 1-x$.
$-x+2 < 1-x \Longleftrightarrow 2 < 1 \Longleftrightarrow x \in \emptyset$
El conjunto solución del CASO 1 es: $S_1 = \emptyset \cap (-\infty, 0) = \emptyset$.

CASO 2: $x \in [0, 2)$ y satisface: $-x+2 < 1+x$.
$-x+2 < 1+x \Longleftrightarrow 1 < 2x \Longleftrightarrow \dfrac{1}{2} < x \Longleftrightarrow x \in \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$
El conjunto solución del CASO 2 es: $S_2 = \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right) \cap [0, 2) = (\dfrac{1}{2}, 2)$.

CASO 3: $x \in [2, +\infty)$ y satisface: $x-2 < 1+x$.
$x-2 < 1+x \Longleftrightarrow -2 < 1 \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$
El conjunto solución del CASO 3 es: $S_3 = \mathbb{R} \cap [2, +\infty) = [2, +\infty)$.

Luego el conjunto solución de la inecuación: $|x-2| < 1+|x|$, es:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \emptyset \cup (\frac{1}{2}, 2) \cup [2, +\infty) = (\frac{1}{2}, +\infty)$$

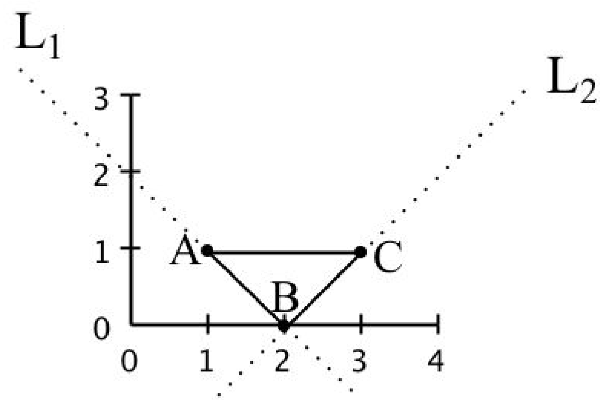
■

3. Sea **T** el triángulo de vértices: $\mathbf{A(1,1)}$, $\mathbf{B(2,0)}$ y $\mathbf{C(3,1)}$.

   a) Verifique analíticamente que **T** es un triángulo rectángulo. (3 pts)

RESPUESTA: Para ello, se debe mostrar que dos segmentos del triángulo T están sobre dos rectas perpendiculares.

Con la finalidad de mostrar lo anteriormente señalado, se grafica la información del problema.



Se considera las rectas siguientes:

L_1 la recta que pasa por los puntos A y B.

L_2 la recta que pasa por los puntos B y C.

Luego las pendientes respectivas de cada recta son:

$$L_1 \quad : \qquad m_1 = \frac{1-0}{1-2} = -1 \ .$$

$$L_2 \quad : \qquad m_2 = \frac{1-0}{3-2} = 1 \ .$$

Por lo tanto, $m_1 * m_2 = -1$, es decir: $L_1 \perp L_2$, y en consecuencia T es un triángulo rectángulo. ■

b) Diga si es cierto que el punto medio de la hipotenusa del triángulo **T** equidista de los tres vértices del triángulo **T** (2 pts)

RESPUESTA: La hipotenusa del triángulo es el lado $\overline{AC}$ y su punto medio es

$$P(\frac{1+3}{2}, \frac{1+1}{2}) = P(2,1)$$

Por lo tanto se tiene:

$$d(A,P) = \sqrt{(2-1)^2 + (1-1)^2} = 1$$

$$d(B,P) = \sqrt{(2-2)^2 + (1-0)^2} = 1$$

$$d(C,P) = \sqrt{(2-3)^2 + (1-1)^2} = 1$$

y en consecuencia, P equidista de los tres vértices del triángulo T. ∎

4. Diga si es verdadero o falso que:
La función inversa de $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{-x}}{\mathbf{x+1}}$ es ella misma. (5 pts)

RESPUESTA:

- Primeramente, se estudia la inyectividad de la función.
DOM(f)=$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
Sean x_1 y x_2, con $x_1, x_2 \in$DOM(f), entonces:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longleftrightarrow \frac{-x_1}{x_1+1} = \frac{-x_2}{x_2+1} \Longleftrightarrow -x_1x_2 - x_1 = -x_2x_1 - x_2 \\ &\Longleftrightarrow -x_1 = -x_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto f es inyectiva y su función inversa asociada existe.

- Cálculo de f^{-1}:RAN(f)$\rightarrow$DOM(f)
Sea $y \in$RAN(f),
$y = \dfrac{-x}{x+1} \Longleftrightarrow yx + y = -x \Longleftrightarrow yx + x = -y \Longleftrightarrow x = \dfrac{-y}{y+1}$
Luego se puede afirmar que f^{-1}=f. ∎